Cálculo Vetorial

Um Livro Colaborativo

22 de janeiro de 2021

Organizadores

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

Licença

Nota dos organizadores

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (`https://github.com/reamat/Calculo`) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamenta da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

`https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo`

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 2

Curvas e trajetórias

Neste capítulo, estudamos funções vetoriais do tipo $\vec{r}(t)$, ou seja, uma função que associa um parâmetro real a vetores no plano ou espaço. Tais função vetoriais, que dependem de apenas uma variável, são os exemplos mais simples que estudaremos.

2.1 Funções vetoriais de uma variável - curvas e trajetórias

Uma função vetorial de uma variável é uma função da forma

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3,$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$ é o domínio de definição de $\vec{r}$ e t é um parâmetro - podendo ser interpretado como o tempo ou não. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Exemplo 2.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 4\operatorname{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 8\pi$

Uma curva no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(t)$ não constante em todo o seu domínio. Um ponto $\vec{r}(t)$ de uma parametrização é dito regular se $\vec{r}\,'(t) \neq 0$. Uma parametrização é dita regular em

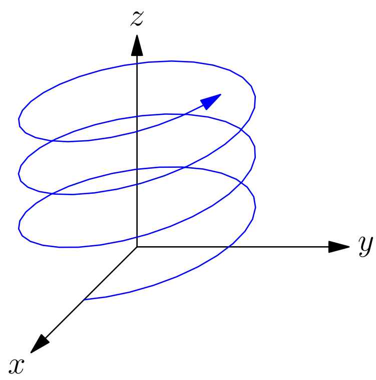


Figura 2.1: Hélice circular dextrogira associada à função vetorial do Exemplo 2.1.3.

t se $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ em todos os pontos. É possível definir orientação para uma curva regularmente parametrizada, a orientação é dada pelo sentido de crescimento do parâmetro t.

Exemplo 2.1.2. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}\,(t)\vec{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ descreve uma circunferência de raio 1 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido anti-horário.

Exemplo 2.1.3. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}\,(t)\vec{j} + t\vec{k}$ para $t \in \mathbb{R}$ descreve uma hélice circular, como mostra a figura 2.1.

O limite, a derivação e a integração vetorial são definidas componente a componente no sistema de coordenadas cartesiano:

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \lim_{t\to a}x(t)\vec{i} + \lim_{t\to a}y(t)\vec{j} + \lim_{t\to a}z(t)\vec{k} \tag{2.1}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \tag{2.2}$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\,\vec{i} + \int_a^b y(t)dt\,\vec{j} + \int_a^b z(t)dt\,\vec{k} \tag{2.3}$$

$$\int \vec{r}(t)dt = \int x(t)dt\,\vec{i} + \int y(t)dt\,\vec{j} + \int z(t)dt\,\vec{k} \tag{2.4}$$

Teorema 2.1.1 (Regras de derivação)**.** *A derivada de funções vetoriais satisfaz as seguintes identidades:*

1. *Se $\vec{r}(t)$ é um vetor constante, então $\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$.*
2. $\frac{d}{dt}\left[\alpha\vec{r}_1(t) + \beta\vec{r}_2(t)\right] = \alpha\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + \beta\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$

3. *Se* $f(t)$ *é uma função real, então* $\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{r}(t)\right] = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

4. $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right] = \vec{r}_1(t)\cdot\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\cdot\vec{r}_2(t)$

5. $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right] = \vec{r}_1(t)\times\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\times\vec{r}_2(t)$

Demonstração. Os dois primeiros ítens podem ser obtidos diretamente de (2.2). A verificação fica a cargo do leitor. O item três pode ser obtido de uma aplicação da regra da cadeia a (2.2):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{r}(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[f(t)x(t)\vec{i} + f(t)y(t)\vec{j} + f(t)z(t)\vec{k}\right] \\
&= \left[f'(t)x(t) + f(t)x'(t)\right]\vec{i} + \left[f'(t)y(t) + f(t)y'(t)\right]\vec{j} + \left[f'(t)z(t) + f(t)z'(t)\right]\vec{k} \\
&= f'(t)\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right] + f(t)\left[x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}\right] \\
&= f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}\,'(t)
\end{aligned}
$$

A derivada do produto escalar de duas funções vetoriais é dado por:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)\right] \\
&= \left[x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t)\right] + \left[y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t)\right] \\
&+ \left[z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t)\right] \\
&= \vec{r}_1(t)\cdot\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\cdot\vec{r}_2(t)
\end{aligned}
$$

Finalmente a derivada do produto vetorial pode ser obtida de:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[y_1(t)z_2(t) - z_1(t)y_2(t)\right]\vec{i} \\
&+ \frac{d}{dt}\left[z_1(t)x_2(t) - x_1(t)z_2(t)\right]\vec{j} \\
&+ \frac{d}{dt}\left[x_1(t)y_2(t) - y_1(t)x_2(t)\right]\vec{k} \\
&= \left[y_1'(t)z_2(t) + y_1(t)z_2'(t) - z_1'(t)y_2(t) - z_1(t)y_2'(t)\right]\vec{i} \\
&+ \left[z_1'(t)x_2(t) + z_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)z_2(t) - x_1(t)z_2'(t)\right]\vec{j} \\
&+ \left[x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)x_2(t) - y_1(t)x_2'(t)\right]\vec{k} \\
&= \left[y_1'(t)z_2(t) - z_1'(t)y_2(t)\right]\vec{i} \\
&+ \left[z_1'(t)x_2(t) - x_1'(t)z_2(t)\right]\vec{j} \\
&+ \left[x_1'(t)y_2(t) - y_1'(t)x_2(t)\right]\vec{k} \\
&+ \left[y_1(t)z_2'(t) - z_1(t)y_2'(t)\right]\vec{i} \\
&+ \left[z_1(t)x_2'(t) - x_1(t)z_2'(t)\right]\vec{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad [x_1(t)y_2'(t) - y_1(t)x_2'(t)]\,\vec{k} \\
&= \quad \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t)
\end{aligned}
$$

□

Demonstraremos agora um importante teorema do cálculo vetorial:

Teorema 2.1.2. *Uma função vetorial $\vec{u}(t)$ possui norma constante se e somente se $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}\,'(t) = 0$.*

Demonstração. Como $\|u\|^2 = \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)$, temos

$$\frac{d\|u\|^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)\right] = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Assim, se $\|u\|$ for constante, a derivada à esquerda é nula e temos $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}\,'(t) = 0$. Reciprocamente se $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}\,'(t) = 0$, então $\|u\|$ deve ser constante. □

Observação 2.1.1. Uma importante interpretação deste teorema é que se $\vec{v}(t)$ representa a velocidade de uma partícula no instante de tempo t, então se o módulo da velocidade $v(t)$ for constante e não nulo então a aceleração $\vec{a} = \vec{v}\,'(t)$ é perpendicular à velocidade sempre que for não nula.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

E 2.1.1. Reconheça e represente graficamente as curvas descritas pelas seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$, $0 \le t \le \pi$

b) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

c) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{k}$, $-\infty < t < \infty$

d) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \sqrt{4 - t^2}\,\vec{j}$, $-2 \le t \le 2$

e) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$

f) $\vec{f}(t) = \text{senh}\,(t)\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$

E 2.1.2. Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de uma partícula dado por

$$\vec{r}(t) = a\cos(wt)\vec{i} + a\,\text{sen}\,(wt)\vec{j}$$

Calcule o vetor velocidade $\vec{v}$ e o vetor aceleração $\vec{v}$ dados por $\vec{v} = \vec{r}\,'(t)$ e $\vec{a} = \vec{v}\,'(t)$.

E 2.1.3. Dada a função vetorial $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - 2\cos\pi t\,\vec{k}$, calcule:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t)$

b) $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

c) $\vec{r}\,'(1)$

d) $\displaystyle\int_0^1 \vec{r}(t)dt$

e) $\displaystyle\int \vec{r}(t)dt$

E 2.1.4. Verifique que a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$ representa uma curva contida em uma circunferência no plano xy centrada na origem. Identifique o raio desta circunferência, identifique a curva e isole os quatro quadrantes.

E 2.1.5. Encontre a derivada de cada uma das funções vetoriais do exemplo 3.1.1

E 2.1.6. Mostre as seguintes identidades:

a) $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \hat{r}(t) = r'(t)$

b) $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \times \vec{r}\,'(t)\right] = \vec{r}(t) \times \vec{r}\,''(t)$

c) $\dfrac{dr(t)}{dt} = \dfrac{1}{r(t)}\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$

d) $\dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{r(t)} - \dfrac{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)}{r(t)^3}\vec{r}(t)$

Observação: Lembre-se que $\hat{r}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)}$ e $r(t) = \|\vec{r}(t)\|$.

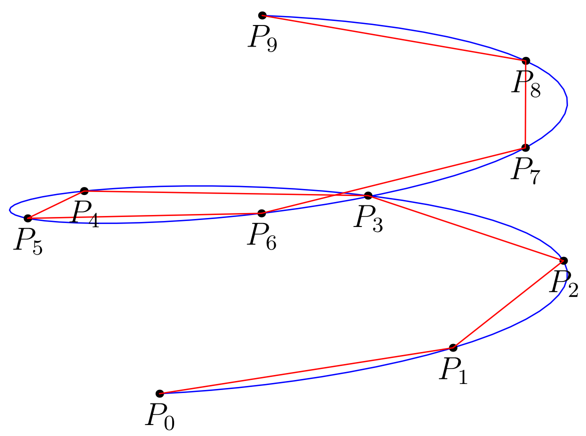


Figura 2.2: Aproximação poligonal do comprimento do arco

2.2 Comprimento de arco

Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ uma partição equidistante do domínio com $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ e $P_i = \vec{r}(t_i)$, $i = 0,1,\cdots,n$, pontos sobre a curva, como mostra a figura 2.2. Uma possível aproximação para o comprimento da curva é dado pelo comprimento da poligonal. Observe que o comprimento do segmento $P_{i-1}P_i$ é dado por $\|P_i - P_{i-1}\|$, logo, a aproximação para o comprimento da curva é

$$
\begin{aligned}
L_n &= \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i-1}\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta t \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\Delta t)^2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.
\end{aligned}
$$

Naturalmente, $L = \lim_{n\to\infty} L_n$. Como o lado direito da última igualdade é uma soma de Riemann, temos:

$$
L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\| dt. \tag{2.5}
$$

Logo, o comprimero do arco s quando a parâmetro corre de a até t é

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(\tau)\| d\tau, \qquad a \leq t \leq b. \tag{2.6}$$

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

2.3 Triedro de Frenet-Serret

Seja a curva descrita pela função vetorial $\vec{r}(t)$. Queremos encontrar um vetor que seja tangente à curva em um dado ponto. Para tal tomamos o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Este limite converge para $\vec{r}\,'(t)$ e, geometricamente, para o vetor tangente à curva no ponto P relativo a $\vec{r}(t)$[1] sempre que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$. O sentido do vetor $\vec{r}\,'(t)$ é dado pela parametrização da curva, em outras palavras, o vetor $\vec{r}\,'(t)$ aponta no sentido em que o parâmetro t cresce.

Observe que a norma do vetor tangente depende de como a curva é parametrizada e não apenas da curva em si. A fim de trabalhar com um objeto que independe da parametrização, é natural definirmos o vetor tangente unitário, denotado por $\vec{T}$ (veja figura 2.4):

$$\|\vec{T}(t)\| = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \qquad \vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}. \tag{2.7}$$

[1] O leitor atento ao formalismo pode tomar esta coma uma definição de vetor tangente. Adiante, veremos que esta definição é consistente com o vetor tangente do cálculo de funções de uma variável.

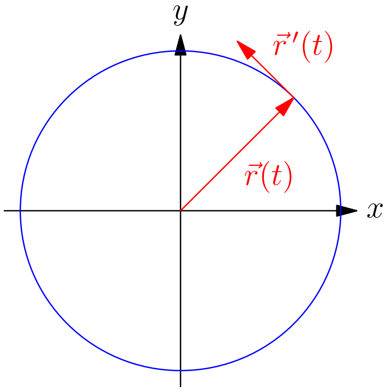


Figura 2.3: O vetor tangente $\vec{r}'(t)$

A condição de existência para o vetor $\vec{T}$ é a função vetorial que parametriza a curva seja diferenciável que sua derivada seja diferente de zero, ou seja, que a parametrização seja regular.

Observação 2.3.1. Quando $\vec{r}(t)$ representa a trajetória de uma partícula ao longo do tempo, a derivada $\vec{r}\,(t)$ é a velocidade $\vec{v}(t)$ da partícula. Neste caso, o vetor tangente unitário é o versor associado a $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t) = v(t)\vec{T}(t).$$

A norma de $\vec{v}(t)$, denotada por $v(t)$, é chamada de velocidade escalar. O vetor $\vec{T}(t)$ indica o sentido e a direção da velocidade.

O vetor $\vec{T}$ pode ser definido de forma alternativa como segue: olhamos s como função de t na expressão (2.6) e observamos que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$. Assim, $s(t)$ é uma função contínua e monótona de t. Também, usando a rega da cadeia, temos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\|\vec{r}'(t)\|.$$

Como $\vec{r}'(t)$ representa o vetor tangente, então

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T}$$

representa um vetor tangente unitário.

Agora, queremos definir um vetor ortogonal a $\vec{T}$ que esteja no mesmo plano formado por $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$. Para isso, usamos o resultado do teorema 2.1.2. Observe que a função vetorial $\vec{T}(t)$ possui módulo constante e, portanto, $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$.

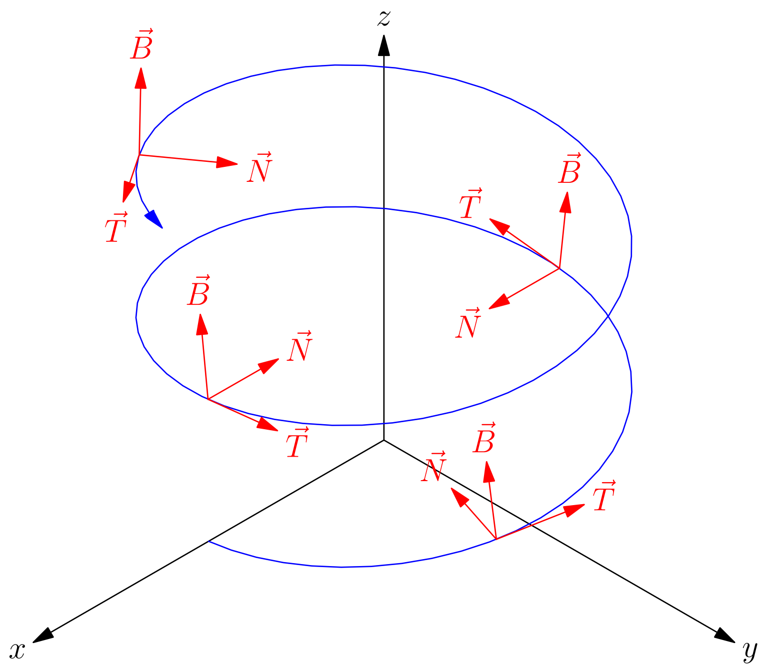


Figura 2.4: Triedro de Frenet-Serret

Observe que $\vec{T}(t)$ e $\vec{T}'(t)$ estão ambos no plano formado por $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ e são ortogonais entre si. No entanto, $\vec{T}'(t)$ não é necessariamente unitário. Logo, faz sentido definir o vetor normal unitário como

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}.$$

A figura 2.4 contém a representação do triedro de Frenet-Serret em alguns pontos de uma hélice dextrogira.

Finalmente, vamos definir um vetor unitário que é simultanemente ortogonal a $\vec{T}$ e $\vec{N}$. A forma natural de obter um vetor ortogonal a outros dois vem do produto vetorial. Assim, o vetor binormal unitário é definido como

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Das propriedades de produto vetorial, temos que $\vec{B}$, além de ortogonal a $\vec{T}$ e $\vec{N}$, é unitário e forma um sistema dextrogiro. O trio $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ é chamado de triedro de Frenet-Serret. A figura 2.4 apresenta a representação de alguns triedros de Frenet-Serret.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

E 2.3.1. Represente graficamente o terno de vetores $\vec{T}$,$\vec{N}$ e $\vec{B}$ e verifique através da regra da mão direita as seguintes identidades:

a) $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

b) $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

c) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

Use a identidade vetorial dada por

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}\,(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

para obter as identidades b e c a partir de a.

E 2.3.2. Considere a trajetória dada pela equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= t\,\mathrm{sen}\,(t) \\ y &= t\cos(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Esboce gráfico dessa trajetória para $0 \leq t \leq 2\pi$, indicando os pontos inicial e final. Esboce o triedro $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ nos instantes $t = \pi/4$, $t = 3\pi/4$, $t = 5\pi/4$, $t = 7\pi/4$.(Obs.: Não é necessário calcular analiticamente o triedro.) Considere a identidade vetorial $\frac{dr^2}{dt} = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ no instante $t = \pi/2$, ela é compatível com seu desenho?

E 2.3.3. Um erro comum entre estudantes é substituir a definição de vetor binormal unitário $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ pela expressão espúria dada por

$$\frac{\frac{d\vec{N}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{N}}{dt}\right\|}.$$

Calcule esta expressão para o movimento circular uniforme e verifique que ela é igual a $-\vec{T}$ e, portanto, perpendicular a $\vec{B}$.

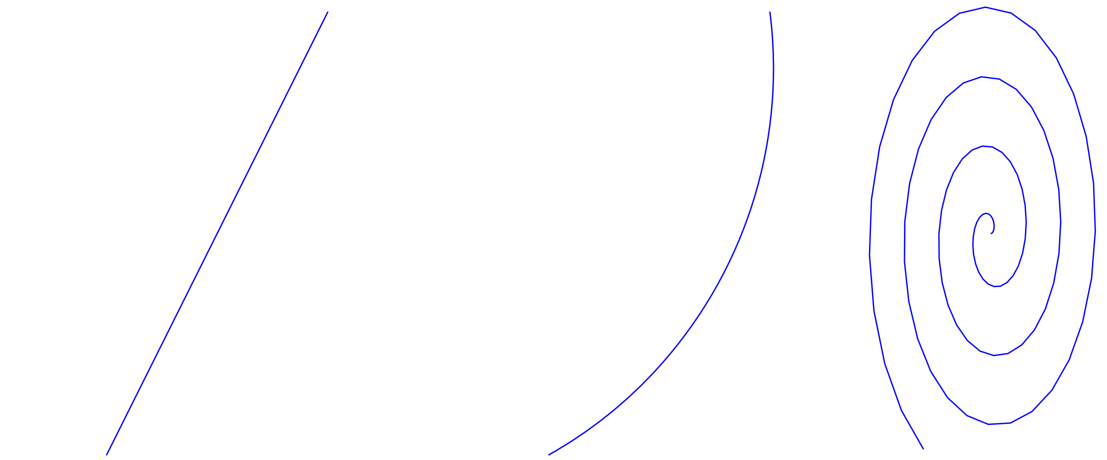


Figura 2.5: Ideia de curvatura.

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

2.4 Curvatura e Torção

Nessa seção, estamos interessados em definir, a cada ponto da curva, funções que medem o quanto ela está torcida ou curvada, isto é, se a curva é muito diferente de uma reta ou se está fora de qualquer plano do espaço. Primeiro, definiremos uma função chamada de curvatura, que mede a cada ponto do domínio, a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco s. Naturalmente, queremos que a reta tenha curvatura nula, pois ela não difere da sua tangente em ponto algum. Para facilitar a visualização, podemos começar pensando apenas nas curvas que estão contidas em algum plano. A figura 2.5 nos dá uma ideia de curvatura.

Pelo teorema 2.1.2, temos que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ é paralelo ao vetor normal $\vec{N}$, ou seja,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}, \tag{2.8}$$

onde $\kappa(t) > 0$ é uma função escalar chamada de curvatura. Por outro lado, calculamos a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco

s usando a regra da cadeia

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{1}{|s'(t)|},$$

onde $s(t)$ é a função que mede o comprimento do arco dado pela expressão (2.6). Usando o fato que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, temos:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|}\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Definimos também, para cada ponto t do domínio, o raio de curvatura $\rho(t)$ da forma:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

O raio de curvatura tem a seguinte interpretação geométrica: considere um ponto $\vec{r}(t_0)$ onde da curvatura não é nula e defina o ponto $\vec{r}(t_0) + \kappa(t_0)\vec{N}$, chamado de centro de curvatura. O círculo centrado no centro de curvatura e raio $\rho(t_0)$ é tangente a curva em t_0 e possui a mesma curvatura (veja a figura 2.6).

Exemplo 2.4.1. A curva descrita por $\vec{r} = a\cos(t)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{j}, \quad a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ é uma cincunferência. Sua curvatura pode ser obtida da seguinte forma:

$$\vec{r}'(t) = -a\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j}, \tag{2.9}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}\,^2(t) + a^2\cos^2(t)} = \sqrt{a^2} = |a| = a, \tag{2.10}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{-a\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j}}{a} = -\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \tag{2.11}$$

$$\tag{2.12}$$

Exemplo 2.4.2. Dada a curva $y = x^2$, vamos encontrar a curvatura e o raio de curvatura no ponto $x = 1$. Primeiro, encontramos uma parametrização para essa curva, por exemplo, $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}$. Calculamos:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j},$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2},$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\left(\vec{i} + 2t\vec{j}\right)$$

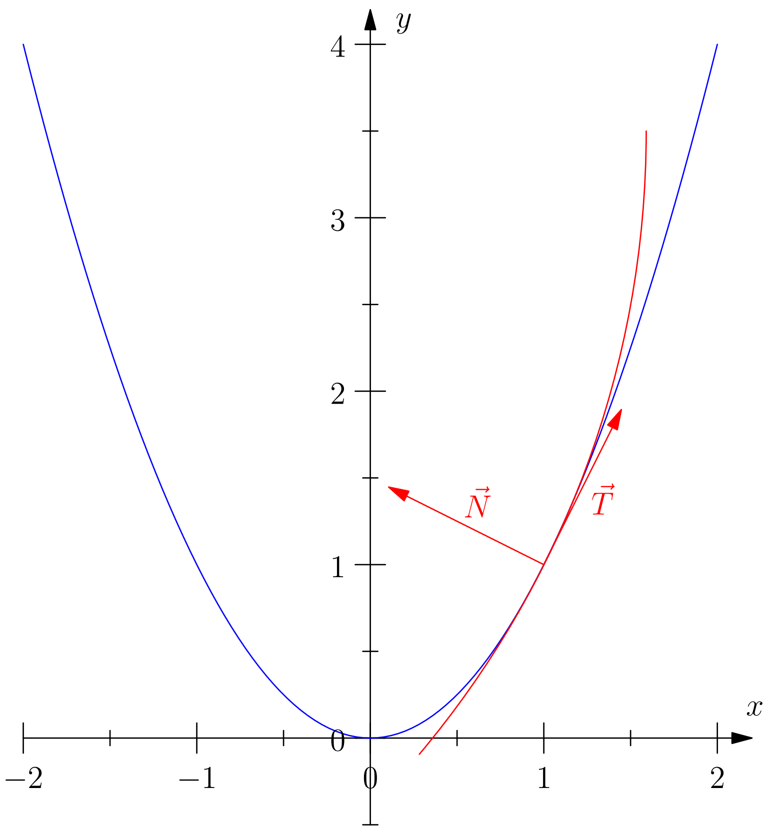


Figura 2.6: Círculo de curvatura

e

$$\vec{T}'(t) = -\frac{4t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8t^2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{j},$$

Em $t = 1$, temos:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{5},$$

$$\vec{T}'(t) = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8}{\sqrt{5^3}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5^3}}\vec{j},$$

e

$$\|\vec{T}'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{5^3} + \frac{4}{5^3}} = \frac{2}{5}.$$

Portanto,

$$\kappa(1) = \frac{\|\vec{T}'\|}{\|\vec{r}'\|} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

e

$$\rho(1) = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

veja representação geométrica na figura 2.6.

O leitor deve ter observado que conhecendo somente a curvatura não é possível reconstruir uma curva a partir de um ponto dado. Um curva pode não estar contida em plano algum no espaço e, por isso, precisamos definir uma função escalar, chamada torção, que mede a magnitude da variação do vetor binormal. A figura 2.7 apresenta uma ideia de torção: uma curva contida em algum plano no espaço tem torção nula e quando maior a variação com respeito ao plano definido por $\vec{T}$ e $\vec{N}$, maior a torção. O leitor deve tomar cuidado na interpretação da figura 2.7, pois se esticarmos indefinidamente a hélice circular representada, ela voltará a se aproximar de uma reta, que tem torção nula (veja problema 2.4.2). Sabendo que a torção será definida em termos da variação do vetor binormal com respeito ao comprimento de arco $s(t)$, fazendo algumas observações:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{T}\times\vec{N}\right) = \frac{d\vec{T}}{ds}\times\vec{N} + \vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}.$$

Usando a expressão (2.8), temos que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$, logo

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}.$$

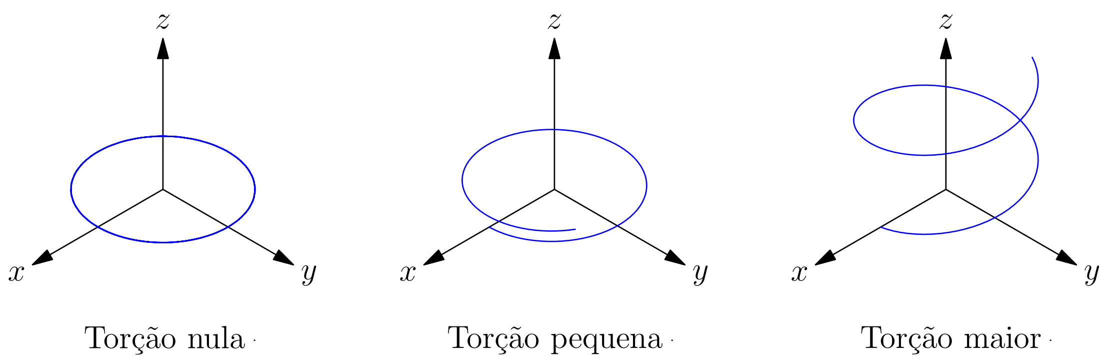


Figura 2.7: Ideia de torção.

Isso implica que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a $\vec{T}$. Mas, pelo teorema 2.1.2, temos que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a $\vec{B}$. Logo, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é paralelo a $\vec{N}$, ou seja,

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}, \tag{2.13}$$

onde τ é chamado de torção. O sinal negativo tem um propósito: quando $\tau > 0$, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ está no sentido de $-\vec{N}$; então se P é um ponto sobre a curva movendo-se no sentido positivo, $\vec{B}$ gira em torno de $\vec{T}$ como um parafuso de rosca direita sendo apertado (veja a figura 2.8). Em alguns contextos, calculamos a módulo da torção, dada por

$$|\tau| = \left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{B}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Ainda, definimos o raio de torção por

$$\sigma(t) = \frac{1}{\tau(t)}.$$

Podemos calcular $\frac{d\vec{N}}{ds}$ em termos da curvatura e da torção:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{B}\times\vec{T}\right) = \frac{d\vec{B}}{ds}\times\vec{T} + \vec{B}\times\frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Usando as expressões (2.8) e (2.13), escrevemos

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\tau\vec{N}\times\vec{T} + \vec{B}\times\kappa\vec{N}.$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}. \tag{2.14}$$

As equações (2.8), (2.13) e (2.14) são chamadas de Fórmulas de Frenet-Serret.

Como esperávamos, se $\kappa = 0$, então $\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$, o que implica que $\vec{T}$ não varia ao longo da curva, ou seja, a curva é uma reta. Agora, se $\tau = 0$, então $\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{0}$ e $\vec{B}$ é um vetor constante. Como $\vec{B} \cdot \vec{T} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0$, então podemos integrar para obter $\vec{B} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$, onde r_0 é um vetor constante da integração. Logo $\vec{r}$ está contido no plano ortogonal a $\vec{B}$.

Exemplo 2.4.3. Vamos calcular curvatura, raio de curvatura e o módulo da torção para a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t) + t\vec{k}$:

$$\vec{r}'(t) = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t) + \vec{k},$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2},$$

$$\vec{T}(t) = -\frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

$$\vec{T}'(t) = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}},$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\rho(t) = 2,$$

$$\vec{N}(t) = -\cos(t)\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\vec{j},$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.
\end{aligned}$$

$$\vec{B}'(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

$$\|\vec{B}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|\tau(t)| = \frac{1}{2}.$$

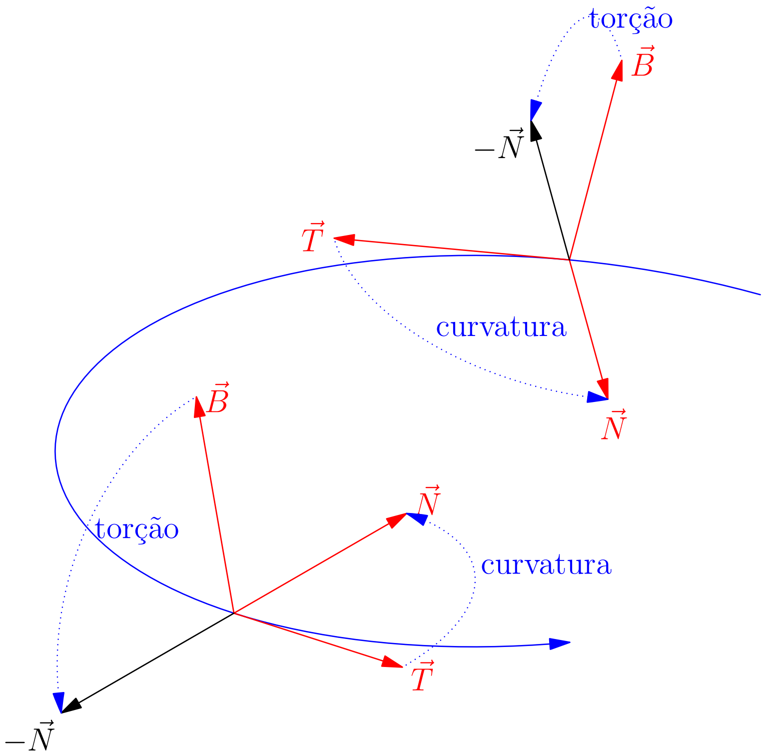


Figura 2.8: Curvatura e Torção

E 2.4.1. Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o módulo da torção das curvas abaixo:

a) $\vec{r} = a\cosh(t)\vec{i} + b\,\mathrm{senh}\,(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$, $a > 0$, $b > 0$.

b) $\vec{r} = a\cos(t)\vec{i} + b\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

c) $\vec{r} = a\cos(t)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\,(t) + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$.

E 2.4.2. Dada a hélice circular $\vec{r} = a\cos(t)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\,(t) + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$, calcule o valor de c para que a torção seja máxima.

A curvatura e a torção podem ser calculadas de maneira mais simples. Para concluir isso, começamos calculando as derivadas de $\vec{r}$. Usamos aqui que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, obtida da equação (2.6):

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = s'\vec{T},$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'' &= s''\vec{T} + s'\vec{T}' \\
&= s''\vec{T} + s'\|\vec{T}'\|\vec{N} \\
&= s''\vec{T} + s'^2\kappa\vec{N}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\vec{r}''' &= s'''\vec{T} + s''\vec{T}' + 2s's''\kappa\vec{N} + s'^2\left(\kappa\vec{N}' + \kappa'\vec{N}\right) \\
&= s'''\vec{T} + s''s'\kappa\vec{N} + \left(2s's''\kappa + s'^2\kappa'\right)\vec{N} \\
&+ s'^3\kappa(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) \\
&= \left(s''' - \kappa^2 s'^3\right)\vec{T} + \left(3s''s'\kappa + s'^2\kappa'\right)\vec{N} + s'^3\kappa\tau\vec{B},
\end{aligned}
$$

onde usamos as expressões (2.8) e (2.14). Agora, tomamos os seguintes produtos:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = s'^3\kappa\vec{B} \qquad \text{e} \qquad \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = s'^6\kappa^2\tau.$$

Isso implica em

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = |s'|^3\kappa \qquad \text{e} \qquad \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = \|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2\tau.$$

ou seja,

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|r'\|^3} \tag{2.15}$$

e

$$\tau = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2}. \tag{2.16}$$

Observação 2.4.1. Uma aplicação natural é a decomposição da aceleração em suas componentes tangencial e normal. Observe que

$$\vec{r}' = \vec{v} = v\vec{T} = s'\vec{T}$$

e

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v^2\kappa\vec{N}.$$

Concluímos que a aceleração está no plano normal a $\vec{B}$ e possui componentes tangencial e normal:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N},$$

onde $a_T = v'$ e $a_N = v^2\kappa$. Então, se a velocidade possui normal constante, temos que $v' = 0$ e a aceleração possui apenas componente normal.

Exemplo 2.4.4. Consideremos agora, a curva gerada pelas seguintes equações paramétricas:

$$x(t) = \cos(t) \qquad y(t) = \text{sen}\,(t) \qquad z(t) = f(t).$$

Onde $f(t)$ é uma função dada. Observe que a projeção desta curva no plano xy é uma circuferência de raio 1. A curva é, portanto, gerada pela trajetória de ponto cuja projeção do movimento no plano xy é cirvular e a altura é dada pela função $f(t)$. Podemos calcular a curvatura e a torção conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \text{sen}\,(t)\vec{j} + f(t)\vec{k} \\
\vec{r'}(t) &= -\,\text{sen}\,(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} \\
\vec{r''}(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \text{sen}\,(t)\vec{j} + f''(t)\vec{k} \\
\vec{r'''}(t) &= \text{sen}\,(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + f'''(t)\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) &= \left[f''(t)\cos(t) + f'(t)\,\text{sen}\,(t)\right]\vec{i} + \left[-f'(t)\cos(t) + f''(t)\,\text{sen}\,(t)\right]\vec{j} + \vec{k} \\
\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) \cdot r'''(t) &= f'(t) + f'''(t) \\
\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\| &= \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2 + \left(f''(t)\right)^2} \\
\|\vec{r'}(t)\| &= \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}
\end{aligned}$$

E finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2 + \left(f''(t)\right)^2}}{\left(1 + \left(f'(t)\right)^2\right)^{3/2}} \\
\tau &= \frac{f'(t) + f'''(t)}{1 + \left(f'(t)\right)^2 + \left(f''(t)\right)^2}
\end{aligned}$$

Podemos, agora, explorar diversos casos particular:

a) Caso $f(t) = c$ constante. Neste caso, recaímos na circunferência de raio 1, cuja curvatura é 1 e a torção é nula.

b) Caso $f(t) = ct$ com c constante. Recaímos na hélice cicular uniforme, já estudada, cuja curvatura é $\frac{1}{1+c^2}$ e a torção é $\frac{c}{1+c^2}$.

c) Caso $f(t) = ct^2$ com c constante. Recaímos na hélice cicular com espaçamento linearmente crescente, cuja curvatura é dada por $\frac{\sqrt{4\,c^2+1+4\,c^2t^2}}{(1+4\,c^2t^2)^{3/2}}$ e cuja torção é dada por $2\,\frac{ct}{4\,c^2+1+4\,c^2t^2}$.

d) Caso $f(t) = \operatorname{sen}(t)$. Recaímos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{2}$ no plano $y = z$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos(t)^2)^{3/2}}$ e a torção é nula.

e) Caso $\tau = 0$, isto é, $f'(t) + f'''(t) = 0$, o que é equivalente a $f(t) = a + b\cos(t) + c\operatorname{sen}(t)$ onde a, b e c são constantes. Recaímos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{1+b^2+c^2}$ no plano $z = bx + cy$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{b^2+c^2+1}}{(1-bc\operatorname{sen}(2t)+c^2\cos^2(t)+b^2\operatorname{sen}^2(t))^{3/2}}$ e a torção é nula.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

E 2.4.3. Considere a hélice dada por

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t), \\ y &= a\operatorname{sen}(t), \\ z &= ct, \end{aligned}$$

onde $a > 0$.

a) Encontre a curvatura desta hélice usando a fórmula

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

b) Encontre a torção desta curva usando a seguinte fórmula para calcular o vetor binormal unitário:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$$

c) Encontre a torção máxima e a torção mínima para um dado a.

E 2.4.4. Considere as funções vetoriais dadas por

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) &= \cos(\pi t)\vec{i} + \operatorname{sen}(\pi t)\vec{j} \\ \vec{g}(t) &= \cos(\pi t^3)\vec{i} + \operatorname{sen}(\pi t^3)\vec{j} \end{aligned}$$

Verifique que ambas parametrizam a mesma curva quando $-1 \leq t \leq 1$. Verifique se as parametrizações são regulares e compare o comportamento da derivada em $t = 0$. Que consequências isso tem para a existência do vetor tangente unitário?

E 2.4.5. Uma motocicleta percorre uma trajetória circular de raio $20m$ com velocidade constante em módulo. A motocicleta poderá derrapar se a aceleração normal exceder $2m/s^2$. Qual é a velocidade máxima do motocicleta para que ela não derrape?

E 2.4.6. Mostre que se a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente, então

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração.

E 2.4.7. Mostre que a curvatura do gráfico da função

$$y = f(x)$$

sobre o plano xy é dada pela expressão

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Use esta expressão para obter a curvatura das seguintes curvas planas:

a) $y = ax + b$

b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a < x < a$ onde $a > 0$.

c) $y = x^4$

d) $y = ax^2$

e) $y = \cosh(x)$

f) $y = \operatorname{senh}(x)$

g) $y = \cos(x)$

Como você interpreta os casos a e b? As curvas dos ítens c e g possuem pontos onde a curvatura é zero. Que implicação isso tem sobre a existência do vetor normal unitário $\vec{N}$? Interprete geometricamente.

E 2.4.8. Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semi-eixos a e b quando $0 < a < b$. O que acontece quando $a = b$? Quais são os semi-eixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre $50m$ e 400m?

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 3

Superfícies

Neste capítulo, estudamos funções vetoriais do tipo $\vec{f}(u,v)$, ou seja, uma função que associa um ponto do plano real a vetores no espaço.

3.1 Funções vetoriais de duas variáveis reais - superfícies

Uma função vetorial de duas variáveis é uma função da forma

$$\vec{r}: D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^3,$$

onde $D_1 \times D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio de definição de $\vec{r}$ e $(u,v) \in D_1 \times D_2$ são os parâmetros ou as coordenadas de superfície. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

Exemplo 3.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(u,v) = \operatorname{sen}(u)\vec{i} + \cos(v)\vec{j} + uv\vec{k}$

b) $\vec{g}(u,v) = \operatorname{sen}(u)\cos(v)\vec{i} + \cosh(u)\operatorname{senh}(v)\vec{k} + u\vec{k}$

Uma superfície no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(u,v)$ não constante em todo o seu domínio. A seguinte interpretação ajuda entender essa função: se fixamos v e temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_u(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Da mesma forma, se fixamos u temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_v(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Se essas curvas não forem paralelas, temos um sistema de coordenadas curvilíneo para escrever todos os pontos da superfície. Pense no globo terrestre, o medidiano

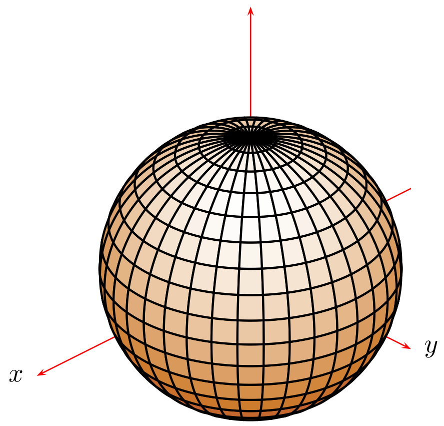


Figura 3.1: Um esfera centrada na origem com meridianos e paralelos traçados.

de Greenwich e a linha do Equador: o globo como uma superfície, Greenwich e Equador como duas curvas e longitude e latitude como um sistema de coordenadas curvilíneo, veja Figura 3.1 Observe que esse sistema curvilíneo fica bem definido quando $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ não são paralelos nos pontos do domínio. Chamamos de superfície regular aquela que satisfaz

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}.$$

Exemplo 3.1.2. A superfície

$$\vec{r} = a\,\mathrm{sen}\,(u)\cos(v)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\,(u)\,\mathrm{sen}\,(v)\vec{j} + a\cos(u)\vec{k},\ \ a > 0,\ \ 0 \leq u < \pi,\ \ 0 \leq v < 2\pi$$

descreve uma esfera centrada na origem e raio a. De fato, colocando

$$x = a\,\mathrm{sen}\,(u)\cos(v), \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,(u)\,\mathrm{sen}\,(v) \qquad \text{e} \qquad z = a\cos(u),$$

temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Além disso, se (x,y,z) é um ponto qualquer nesta esfera, então existem u e v na parametrização. Para tal, basta escolher $u = \cos^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)$ e escolher $v \in [0,2\pi)$ tal que:

$$\cos(v) = \frac{x}{a\,\mathrm{sen}\,(u)} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,(v) = \frac{y}{a\,\mathrm{sen}\,(u)},\ \ u \neq 0\ \ \text{e}\ \ u \neq \pi.$$

3.2 Quádricas

A figura 3.2 apresenta uma lista das principais quádricas estudadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com funções de várias variáveis. As equações são as seguintes:

a) Cone elíptico: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

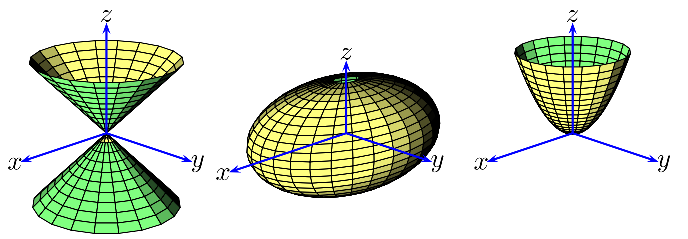
b) Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

c) Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

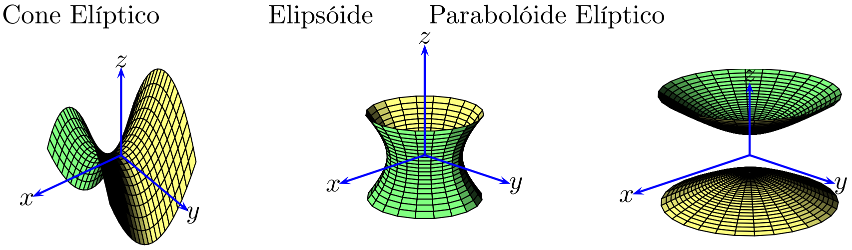
d) Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

e) Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

f) Hiperbolóide de duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Cone Elíptico Elipsóide Parabolóide Elíptico



Parabolóide Hiperbólico Hiperbolóide de uma folha Hiperbolóide de duas folhas

Figura 3.2: Quádricas

3.3 Casos $y = f(x,z)$, $z = f(x,y)$ ou $x = f(y,z)$

O caso particular da superfície representada por uma função $z = f(x,y)$, podemos assumir uma parametrização natural $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$. Analogamente para os casos $y = f(x,z)$ ou $x = f(y,z)$, podemos assumir, respectivamente, as parametrizações $\vec{r} = u\vec{i} + f(u,v)\vec{j} + v\vec{k}$ ou $\vec{r} = f(u,v)\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k}$. Para o caso $z = f(x,y)$ (analogamente para os demais), a condição $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ assume a forma

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u(u,v) \\ 0 & 1 & f_v(u,v) \end{vmatrix} \\ &= -f_u\vec{i} - f_v\vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Isso implica que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, ou seja, a superfície é regular. Voltaremos a discutir esse assunto nos próximos capítulos, quando o vetor gradiente estiver definido.

3.4 Vetor unitário normal

Para os fins de teoria de integraçao sobre superfícies, que discutiremos mais adiante, é fundamental definir o vetor unitário normal. Dado uma superfície e um ponto nela, dizemos que um vetor é normal à superfícies, se ele é perpendicular no ponto a cada curva contida na superfícies. Em especial, um vetor normal à superfícies no ponto $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$ e $z_0 = z(u_0,v_0)$, deve ser perpendicular às curvas $\vec{r}(u_0,v)$ e $\vec{r}(u,v_0)$, isto é, as curvas geradas quando se fixa um dos parâmetros u_0 ou v_0, respectivamente. Assim, podemos concluir que cada vetor normal está da mesma direção do produto vetorial $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Finalmente, o vetor normal unitário deve ter normal unitário, portanto, deve ser da forma:

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}. \tag{3.1}$$

Aqui o sinal indica para qual lado o vetor normal aponta.

Capítulo 4

Campos vetoriais

4.1 Campos escalares e campos vetoriais

Campo é termo usado para designar funções definidas em uma porção do espaço tridimensional (ou bidimensional), isto é, funções cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$). Trabalharemos com dois tipos de campos: os campos escalares e os campos vetoriais. Os campos vetoriais são funções cuja imagem é composta de vetores no $\mathbb{R}^3$, já a imagem dos campos escalares são números reais, isto é, escalares.

Exemplo 4.1.1. São exemplos de campos escalares.

a) A função que liga a posição de um ponto dentro de uma sala à temperatura neste ponto.

b) A pressão do ar como função da posição na atmosfera.

c) $f(x,y,z) = 100 + 20e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

d) $f(x,y,z) = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Exemplo 4.1.2. São exemplos de campos vetoriais.

a) A função que liga a posição de um ponto dentro de uma fluido à velocidade (vetor) neste ponto.

b) O campo magnéticos, elétrico, gravitacional etc.

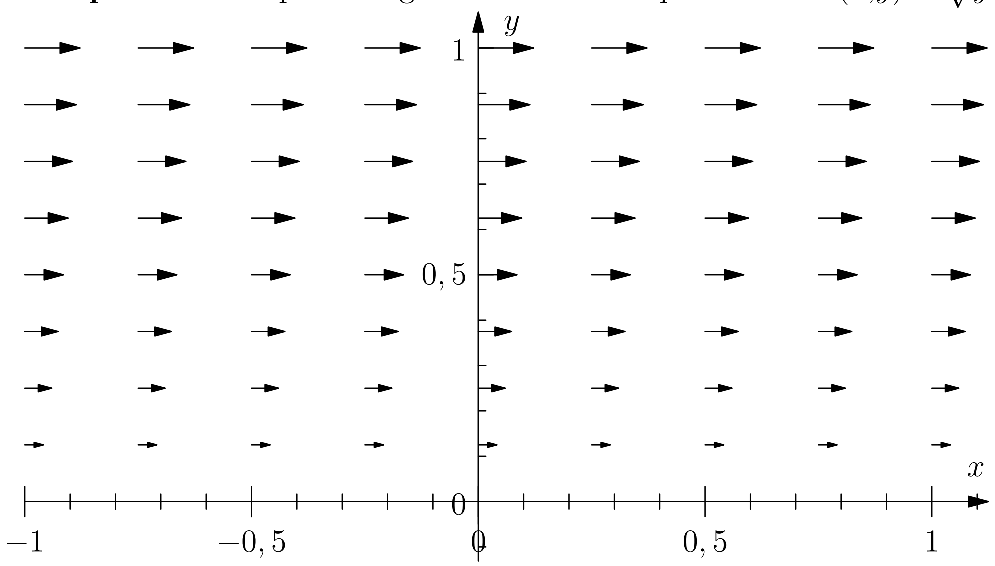
c) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$.

d) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{r} \times \vec{k}$

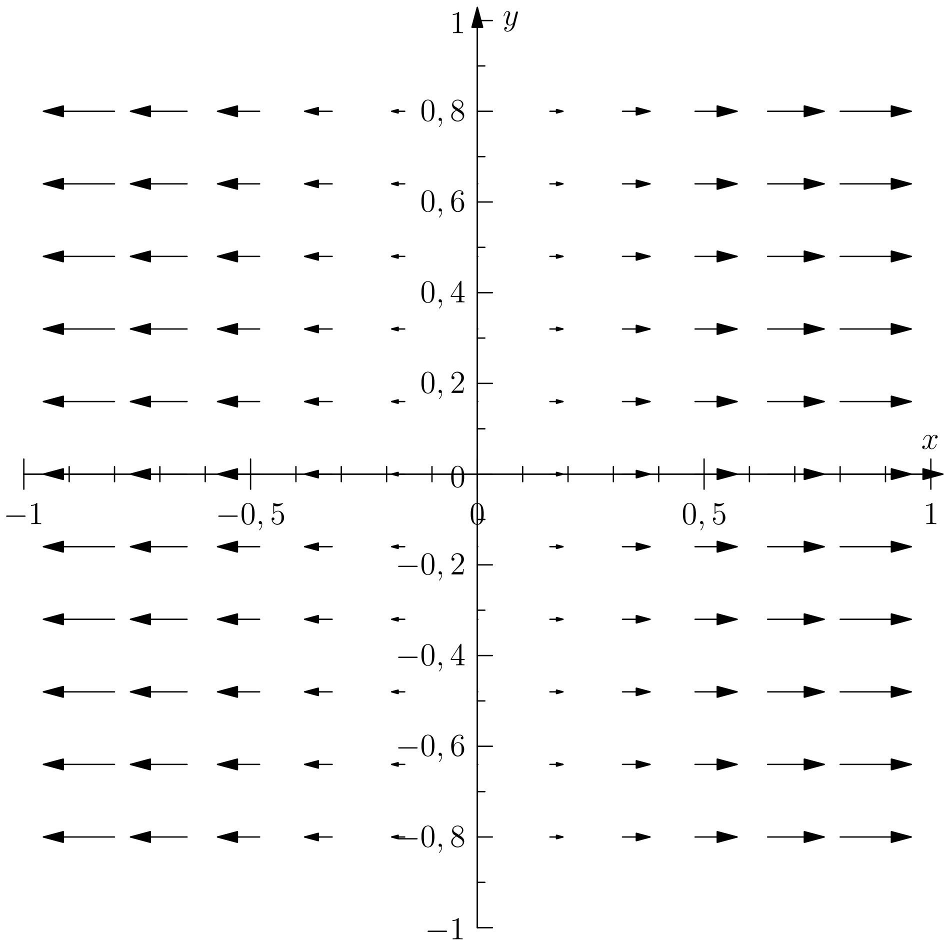
4.2 Representação gráfica dos campos vetoriais

Um campo vetorial é representado graficamente por um conjunto de setas partindo de pontos (x,y,z) e de comprimento proporcional ao módulo de $\vec{F}(x,y,z)$ e mesma direção e sentido de $\vec{F}(x,y,z)$. O conjunto de pontos é escolhido de forma arbitrária de forma a permitir interpretar o campo.

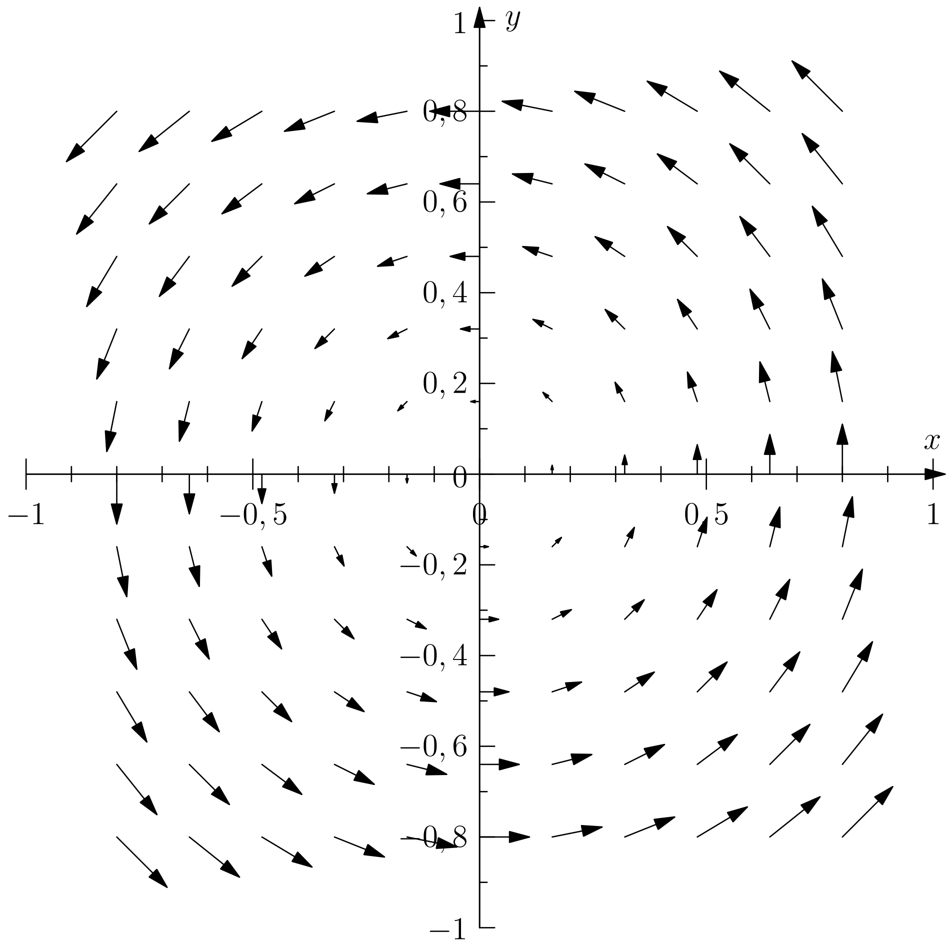
Exemplo 4.2.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i}, \ \ y \geq 0$.



Exemplo 4.2.2. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = x\vec{i}, \ \ y \geq 0$.



Exemplo 4.2.3. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



4.3 Cálculo com o operador nabla

4.3.1 Operador $\vec{\nabla}$

No cálculo vetorial, o operador $\vec{\nabla}$, pronunciado nabla ou del, é um símbolo usado para denotar uma série de operadores diferenciais definidos em campos escalares e vetorias, como gradiente, divergente e rotacional. Ele é definido simbolicamente como:

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1}$$

Rigorosamente falando, o operador del não é um operador diferencial, mas um mnemônico que ajuda a lembrar de uma série de operadores diferenciais:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{(Gradiente)},\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{(Divergente)},\\
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \quad \text{(Rotacional)}.
\end{aligned}$$

O rotacional pode ser representado pelo seguinte determinante simbólico, que funciona como um mnemônico para lembrar facilmente de sua definição:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 4.3.1. Calule o gradiente do campo escalar dado por $f(x,y,z) = xy + z$.

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \vec{i} + x\vec{j} + \vec{k} \tag{4.2}$$

Exemplo 4.3.2. Calule o divergente e o rotacional do campo vetorial dado por $\vec{F} = (yz + x)\vec{i} + z^2\vec{j} + z^3\vec{k}$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 3z^2 = 3z^2 + 1 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x & z^2 & z^3 \end{vmatrix} && (4.4)\\
&= (0 - 2z)\,\vec{i} + (y - 0)\,\vec{j} + (0 - z)\,\vec{k} && (4.5)\\
&= -2z\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}. && (4.6)
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3. Dado o campo vetorial dado por $\vec{F} = x^5\vec{i} + y^2\vec{j}$, calcule o gradiente do divergente,$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, de $\vec{F}$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 5x^4 + 2y && (4.7)\\
\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= 20x^3\vec{j} + 2\vec{j} && (4.8)
\end{aligned}$$

4.3.2 Operadores diferenciais de segunda ordem

Operadores diferenciais de segunda ordem podem ser definidos através da composição de operadores diferenciais de segunda ordem. Combinando o gradiente, rotacional e divergente, encontramos as seguintes possibilidades:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \qquad \text{(Divergente do gradiente ou laplaciano)} \tag{4.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \qquad \text{(Rotacional do gradiente)} \tag{4.10}$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \qquad \text{(Gradiente do divergente)} \tag{4.11}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \nabla \times \vec{F} \qquad \text{(Divergente do rotacional)} \tag{4.12}$$

$$\vec{\nabla} \times \nabla \times \vec{F} \qquad \text{(Rotacional do rotacional)} \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

Os operadores $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla} \cdot \nabla \times \vec{F}$ são identicamente nulos, o que pode ser provado por simples inspeção

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \tag{4.16}$$

Sob sufiente regularidade, as derivadas parciais podem ser comutadas e cada termo do rotacional é nulo, isto é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \equiv 0 \tag{4.17}$$

para todo f continuamente diferenciável.

4.3.3 Derivada direcional e gradiente

4.3.4 Divergente

4.3.5 Rotacional

4.4 Identidades envolvendo o operador nabla

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0} \tag{4.18}$$

4.5 Campos conservativos

Definição 4.5.1. *Um campo $\vec{F}(x,y,z)$ é dito conservativo se existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$ tal que*

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi$$

Neste caso φ é chamado de campo potencial de

$$\vec{F}(x,y,z)$$

Observação 4.5.1. Campos conservativos também são conhecidos como campos grandiente ou campos irrotacionais, este último nome advém do fato que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}.$$

Esta identidade é oriunda da Equação 4.18.

Exemplo 4.5.1. O campo $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ é conservativo por $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(x^2y\right)$.

Teorema 4.5.1. *Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo e $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, então $\vec{F}$ é conservativo.*

Demonstração. Como $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, temos:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \tag{4.21}$$

Defina, agora, a função $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^x F_1(s,y,z) + \int_0^y F_2(0,s,z) + \int_0^z F_3(0,0,s).$$

Basta provar que $\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = \vec{F}$, isto é

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_1, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2, \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3. \tag{4.24}$$

A primeira desigualdade advém diretamente do teorema fundamental do cálculo. Para obter a segunda desigualdade, derivamos o potencial em relação a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,z) &= \int\int 0^x \frac{\partial}{\partial y}F_1(s,y,z)ds + F_2(0,y,z) \\
&= \int_0^x \frac{\partial}{\partial s}F_2(s,y,z)ds + F_2(0,y,z) \\
&= (F_2(x,y,z) - F_2(0,y,z)) + F_2(0,y,z) = F_2(x,y,z)
\end{aligned}$$

Onde usamos a Identidade 4.20.

Finalmente, para obter a terceira desigualdade, derivamos o potencial em relação a z:

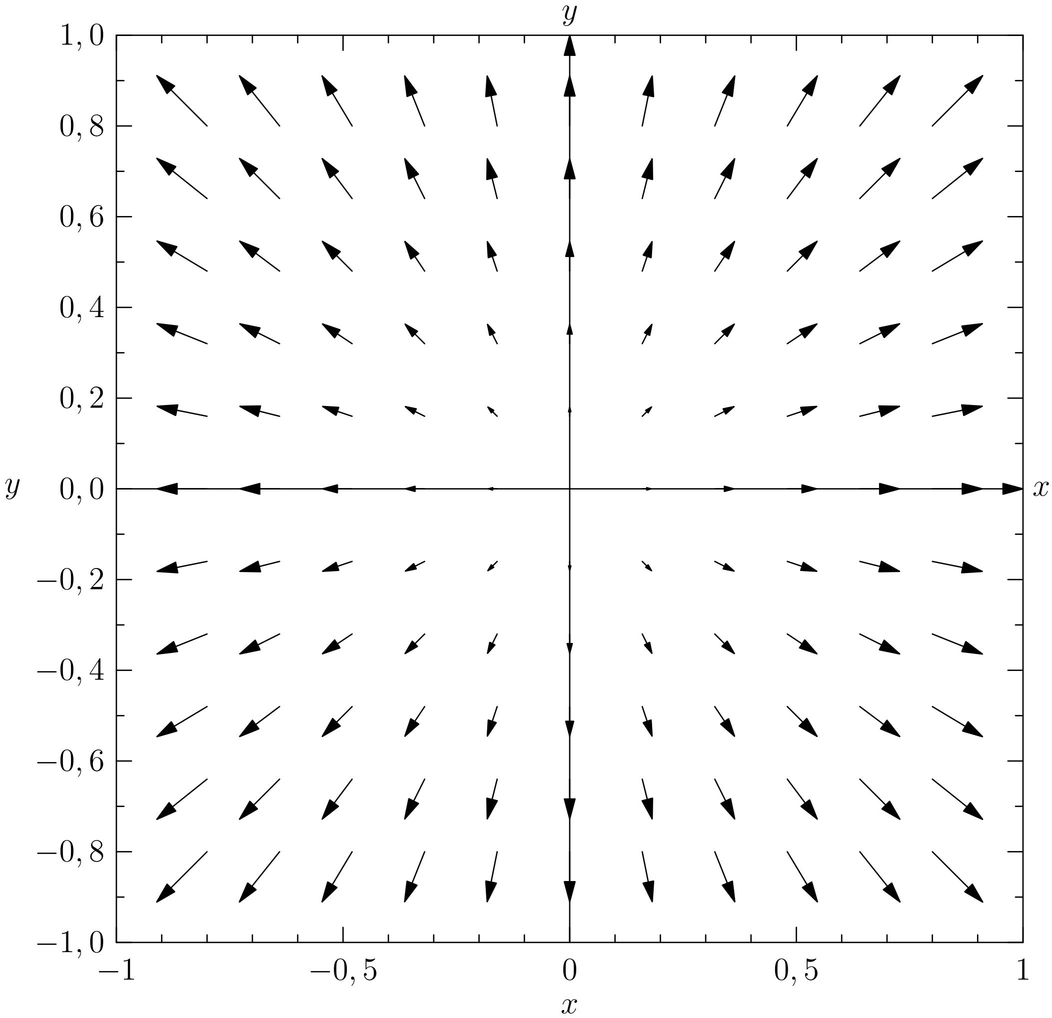
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial z}F_1(s,y,z)ds + \int_0^y \frac{\partial}{\partial z}F_2(0,s,z)ds + F_3(0,0,z) \\
&= \int_0^x \frac{\partial}{\partial s}F_3(s,y,z)ds + \int_0^z \frac{\partial}{\partial s}F_3(0,s,z)ds + F_3(0,0,z) \\
&= \int_0^x (F_3(x,y,z) - F_3(0,y,z)) + (F_3(0,y,z) - F_3(0,0,z)) + F_3(0,0,z) \\
&= F_3(x,y,z)
\end{aligned}$$

Onde usamos as Idendidade 4.19 e 4.21. □

4.6 Campos radiais e potenciais centrais

Campos radiais vetoriais são campos da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, isto é campos vetoriais cujo módulo depende apenas da distância até a origem, isto é, de $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e cuja direção é sempre paralela ao vetor posição, $\vec{r}$.

Exemplo 4.6.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F} = \vec{r}$ no plano xy.



Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

ER 4.6.1. Um exercício.

Solução. Resolução do exercício. ◊

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

E 4.6.1. Um exercício.

4.7 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

E 4.7.1. Um exercício.

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo